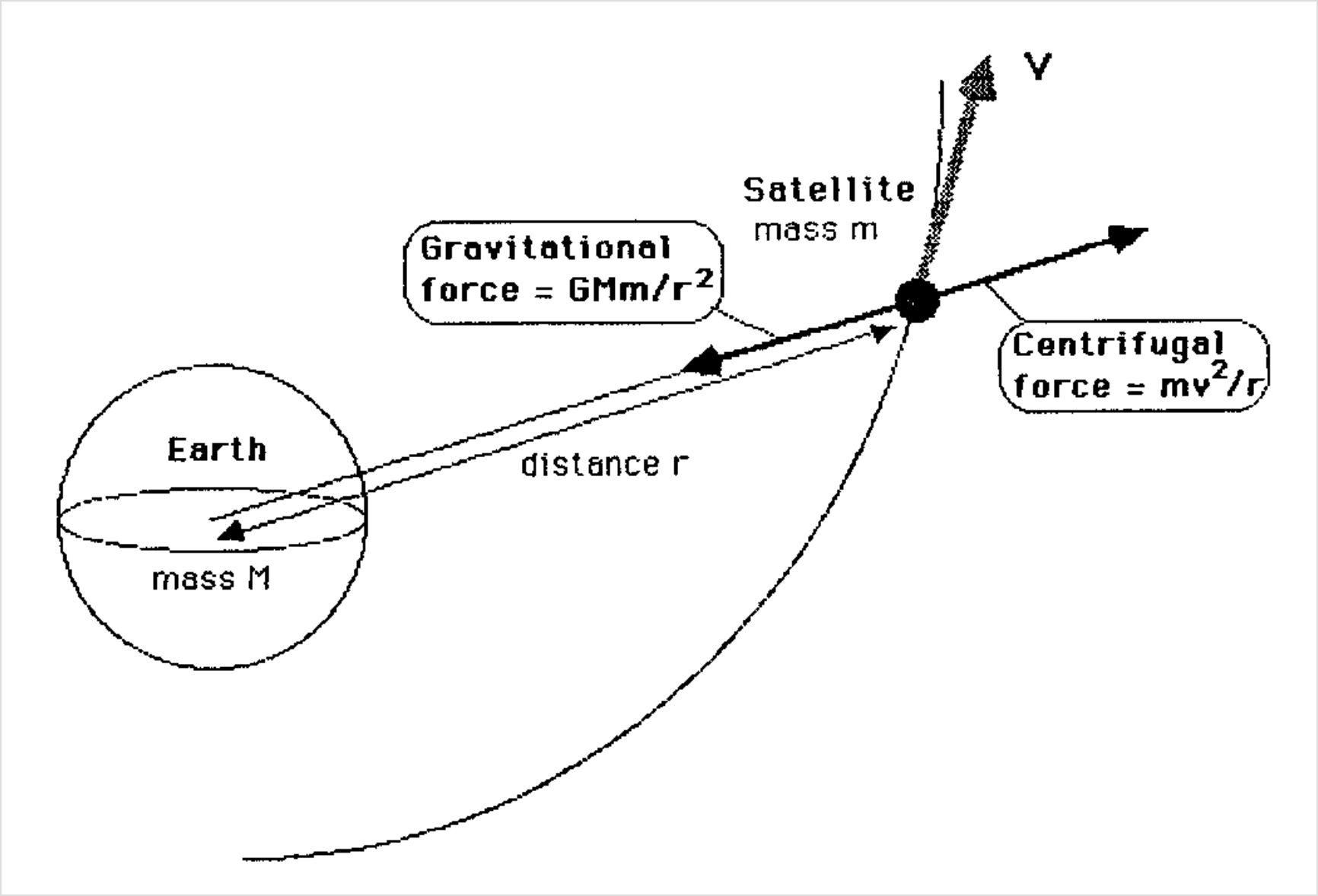
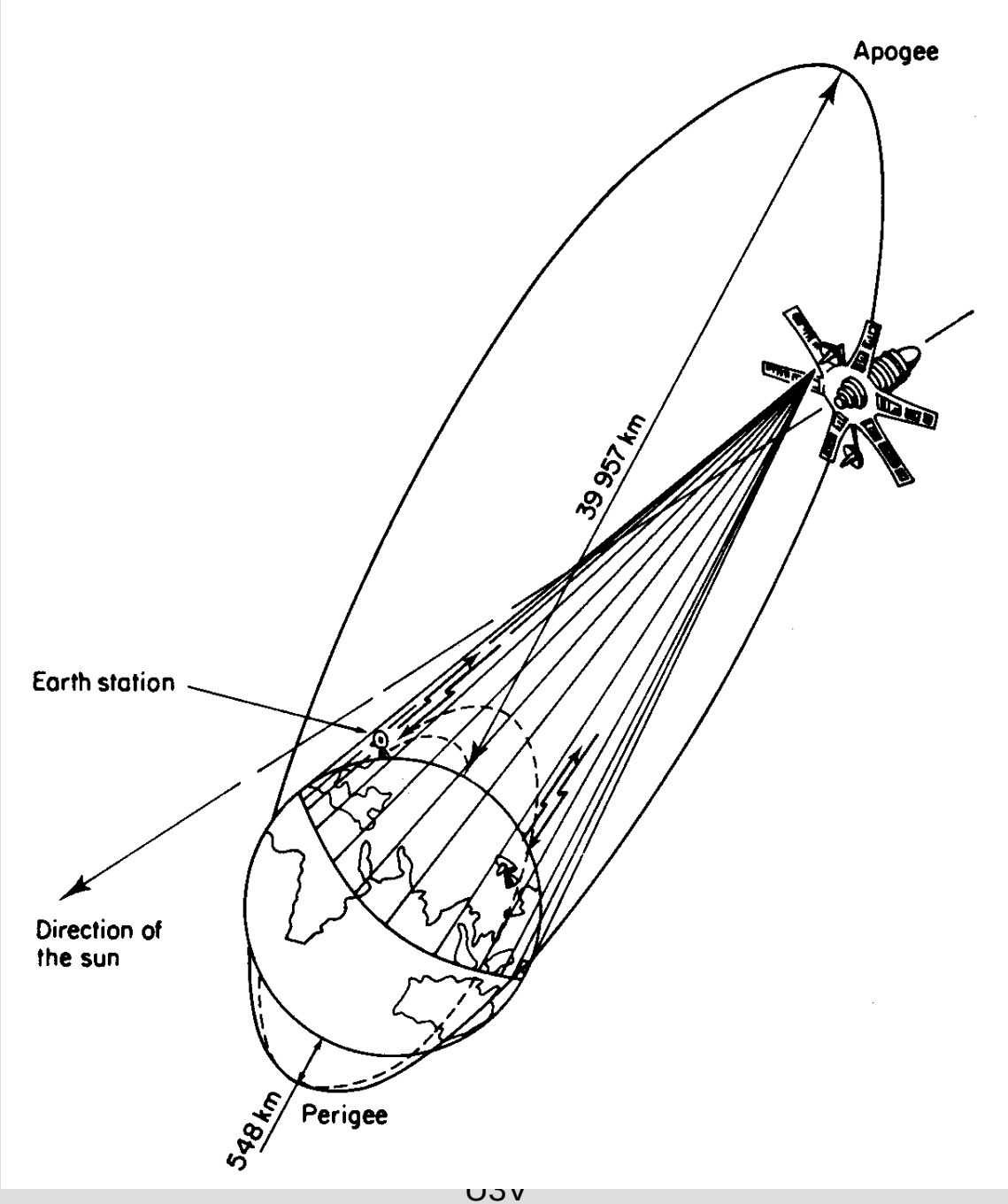
Nebeská mechanika

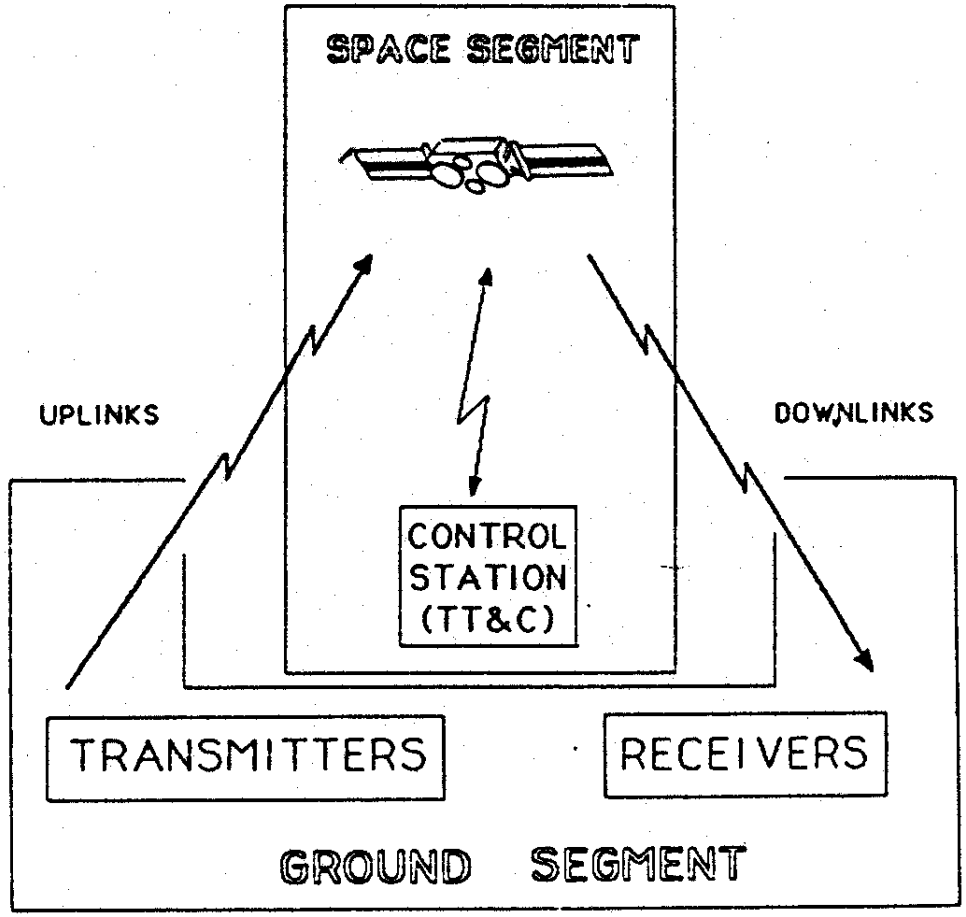
Prof. Ing. Miroslav Kasal, CSc.
Ústav radioelektroniky
FEKT VUT v Brně
SE7.108
E-mail kasal@feec.vutbr.cz
http://www.urel.feec.vutbr.cz/esl/

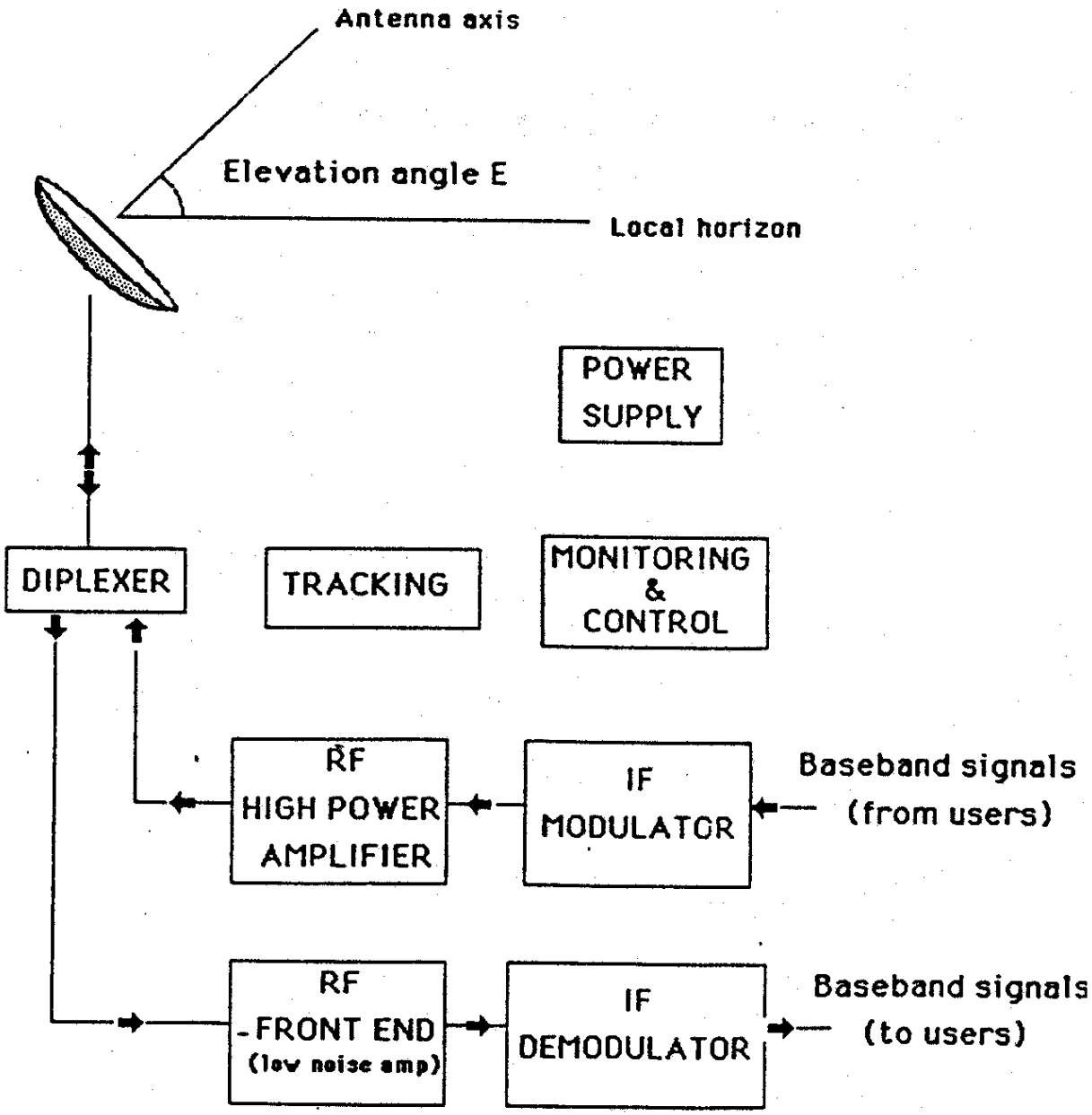
http://www.urel.feec.vutbr.cz/esl/files/Othact/U3V/3.pdf


V
Satellite
mass m
Gravitational
force = GMm/r²
Centrifugal
force = mv²/r
Earth
distance r
mass M


Apogee
39 957 km
Earth station
Direction of
the sun
548 km
Perigee

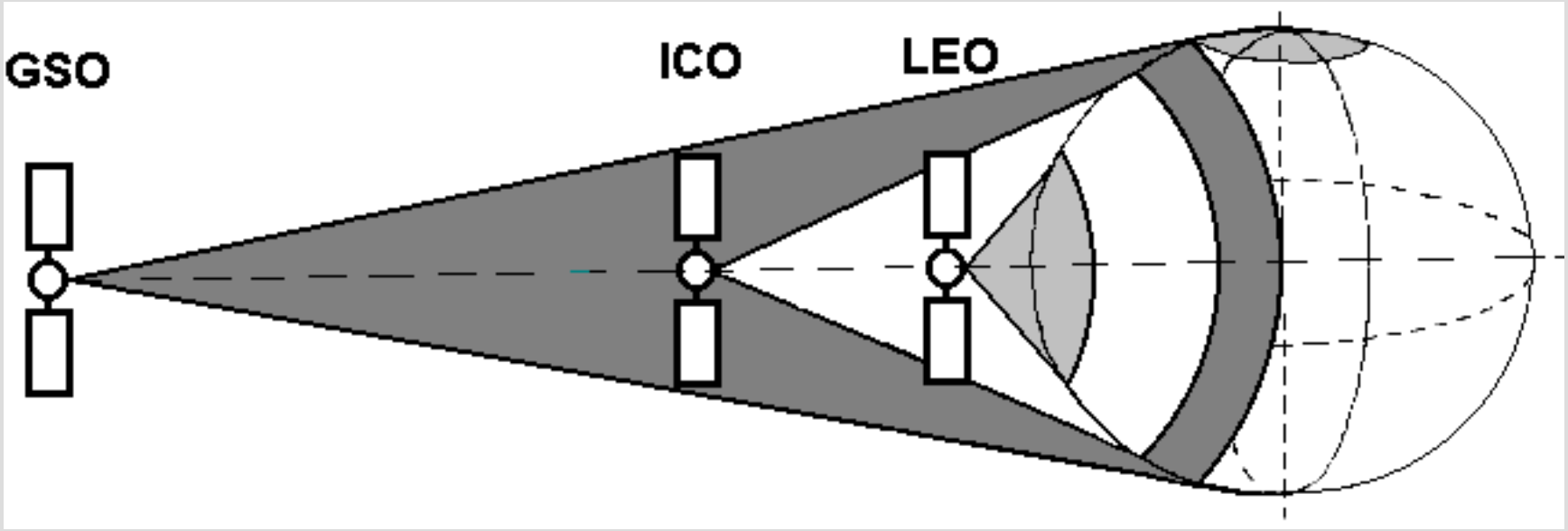
The architecture of a satellite communication system




Antenna axis
Elevation angle E
Local horizon
POWER SUPPLY
DIPLEXER
TRACKING
MONITORING & CONTROL
RF HIGH POWER AMPLIFIER
IF MODULATOR
Baseband signals (from users)
RF - FRONT END (low noise amp)
IF DEMODULATOR
Baseband signals (to users)

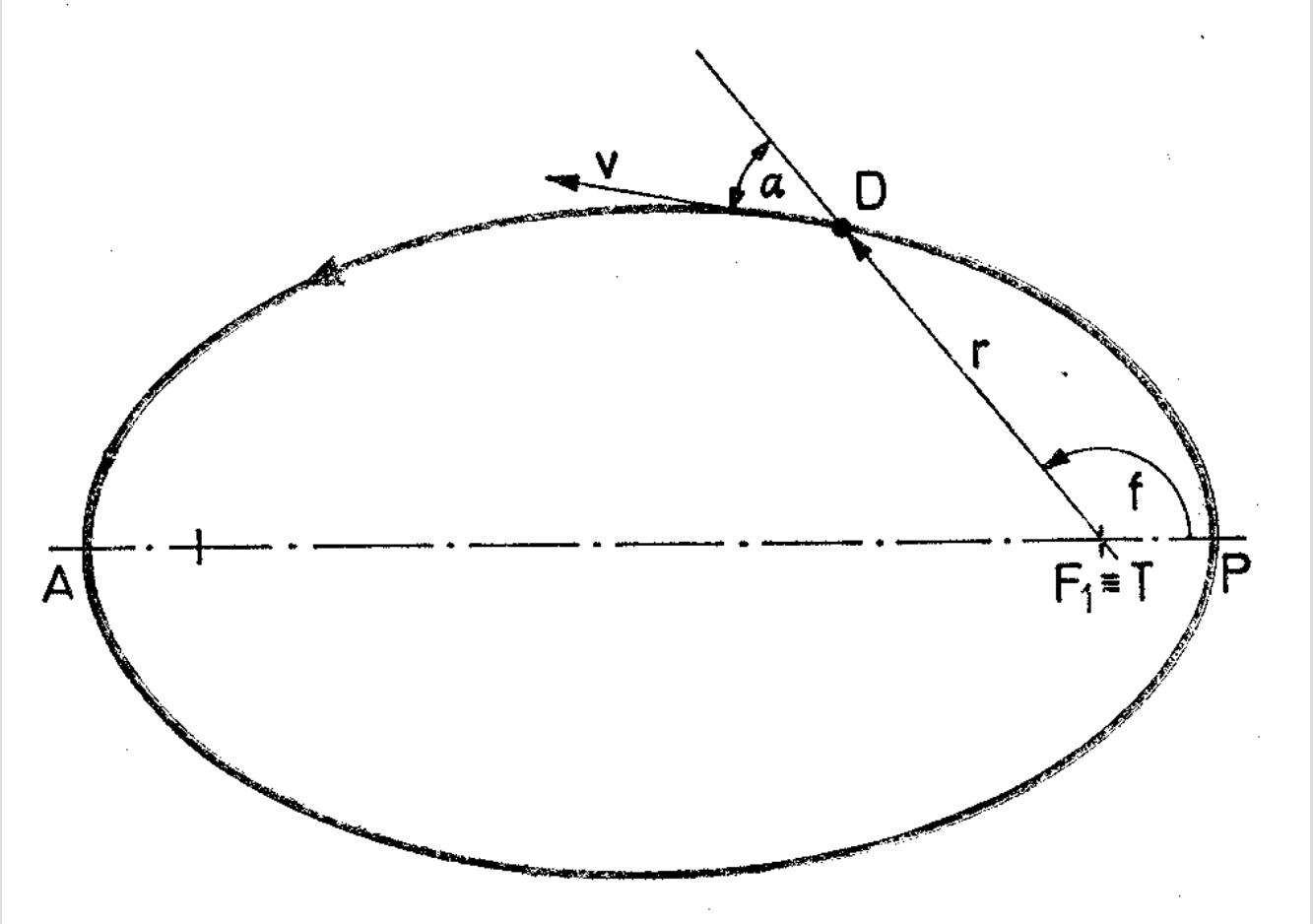
LEO - nízká kruhová dráha (Low Earth Orbit < 2000 km)
ICO - střední kruhová dráha (Intermediate Circular Orbit (MEO) 5000 - 15000 km)
HEO - vysoká eliptická dráha (High Elliptical Orbit) v apogeu 40000 km, i ≈ 63 deg
GEO - geostacionární dráhy (GEostationary Orbit (GSO) 35786 km)

Orbita	Výška [km]	Perioda	Zpoždění ($90^o/0^o$ elev.) [ms]
GEO	35786	23 h 56 min	119,5 / 139,3
ICO	10355	5 h 59 min	34,5 / 51,7
LEO	700	1 h 39 min	2,3 /10,3

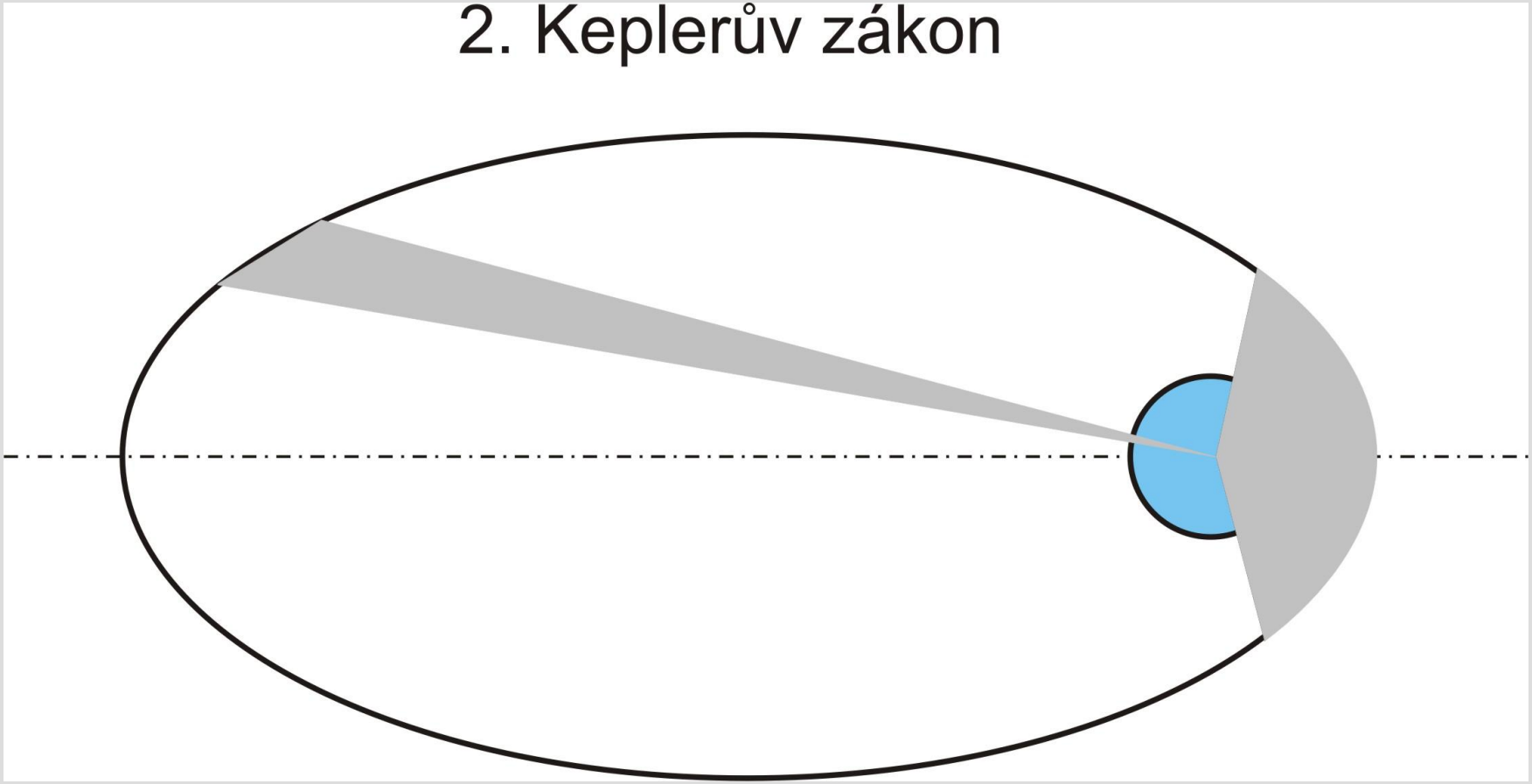

GSO
ICO
LEO

Pohyb družice a predikce její polohy

Keplerovy zákony



2. Keplerův zákon



Bod v němž je družice nejblíže zemskému povrchu se nazývá **perigeum**, zatímco nejvzdálenější **apogeum**. Oba body určují přímku apsid na které leží hlavní poloosa dráhy **a**. Abychom mohli určit, kde se v daném okamžiku družice nachází, musíme znát tvar dráhy, její umístění v prostoru a polohu satelitu na této dráze odpovídající určitému okamžiku v minulosti.

Poloha družice je určena průvodičem ***r*** a úhlem ***f***, který je nazýván pravou anomálií. Velikost vektoru rychlosti ***v*** je dána vztahem

$$v = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

kde μ je gravitační parametr (součin hmotnosti Země a univerzální gravitační konstanty).
Pro Zemi je $\mu = 398\,600{,}3\ km^3 s^{-2}$.

Tvar dráhy (elipsy) je určen hlavní poloosou ***a***
a excentricitou (výstředností) ***e***. Výška perigea h_p
a výška apogea h_a jsou k těmto veličinám vázány vztahy

$$a = \frac{h_p + h_a}{2} + R_0 \qquad e = \frac{h_a - h_p}{2a}$$

kde R_0 je poloměr Země 6378 km.

Třetí Keplerův zákon vyjadřuje relaci mezi dobou oběhu tělesa – periodou ***P*** a velikostí hlavní poloosy ***a***

$$a^3 = \mu\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2$$ [km; s]

Pohybuje-li se těleso po uzavřené dráze, pak za jednotku času opíše jeho průvodič průměrně úhel

$$n = \frac{2\pi}{P}$$

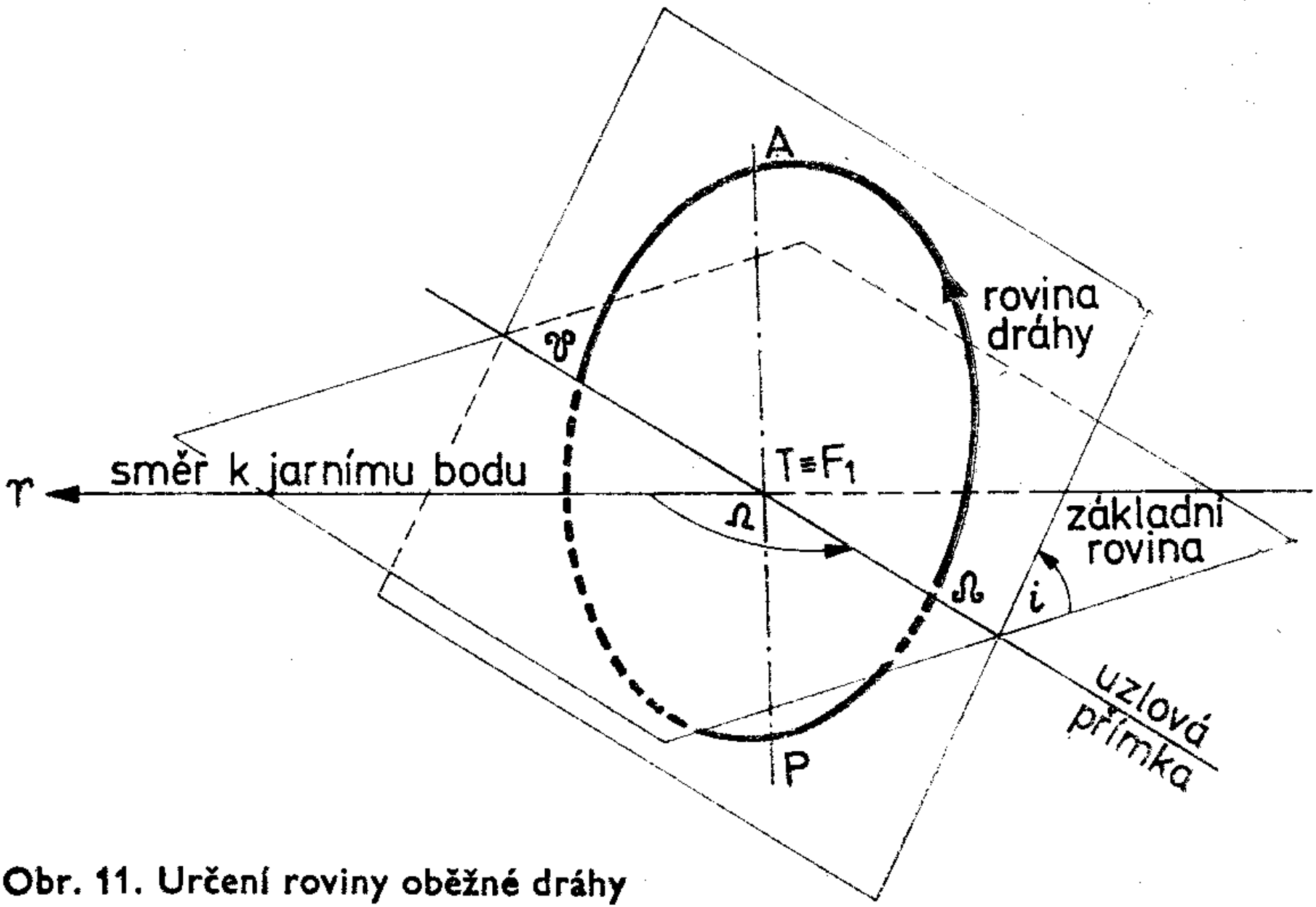
Veličinu ***n*** nazýváme středním pohybem tělesa. Násobíme-li střední pohyb dobou ***t***, která uplynula od průchodu tělesa perigeem dostaneme střední anomálii ***M***

$$M = n \cdot t$$ [rad; rad.s-1, s]

Střední anomálie tedy vyjadřuje časový údaj ale v úhlové míře. V perigeu je ***M*** = 0 a v apogeu ***M*** = π.

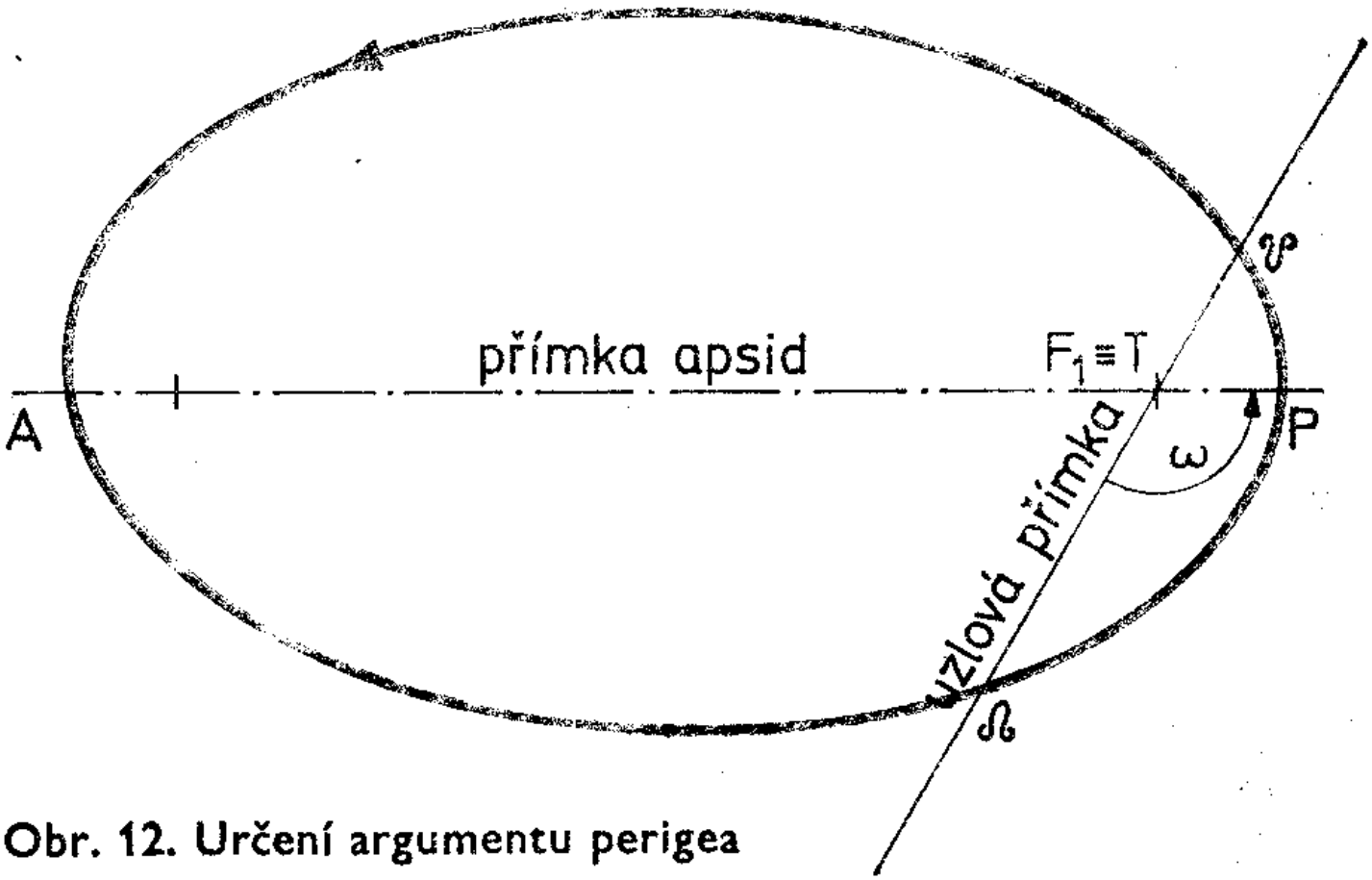
Rovinu dráhy definujeme pomocí dvou úhlů a sice sklonem roviny dráhy k rovině rovníku (inklinací) ***i*** a délkou vzestupného uzlu **Ω**. Oběžná dráha protíná rovinu rovníku ve dvou bodech, zvaných uzly. Vzestupný uzel je ten, ve kterém dráha protíná rovinu rovníku ve směru pohybu tělesa z jižního poloprostoru do severního poloprostoru. Opačný uzel se nazývá sestupným. Spojnice obou uzlů určuje uzlovou přímku.

V základní rovině (rovině rovníku) musí být stanoven pevný směr k němuž délku vzestupného uzlu vztáhneme. Bývá jím obvykle směr k jarnímu bodu, ve kterém se nachází Slunce v okamžiku jarní rovnodennosti. Délkou vzestupného uzlu **Ω** je úhel mezi směrem k jarnímu bodu a uzlovou přímkou.



Obr. 11. Určení roviny oběžné dráhy

Máme-li definován tvar dráhy a její rovinu, zbývá ještě určit jak je dráha v této rovině natočena. Tuto informaci poskytuje argument perigea $\boldsymbol{\omega}$. Je to úhel který svírá průvodič perigea s průvodičem vzestupného uzlu.

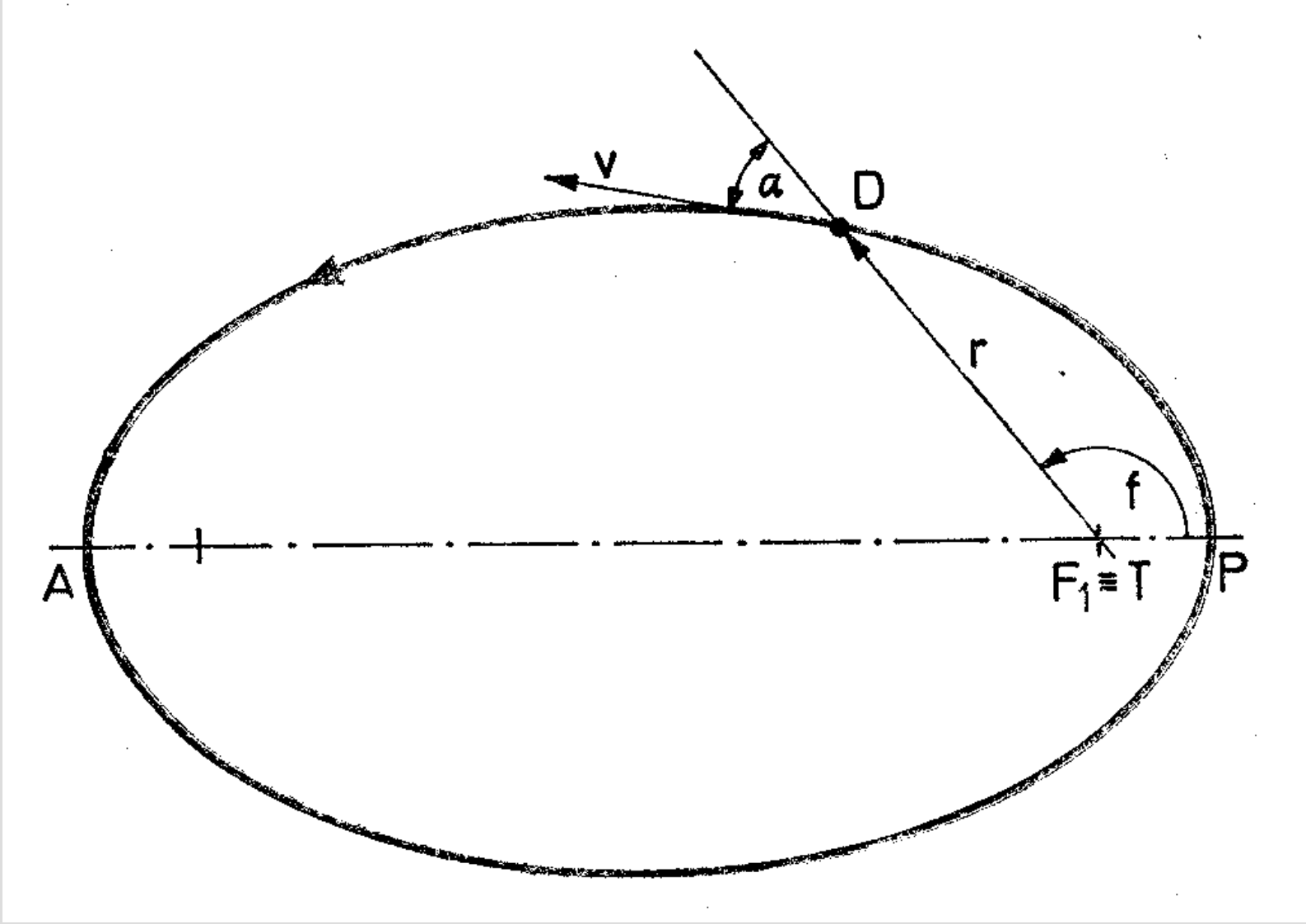


Obr. 12. Určení argumentu perigea

Uvedených pět veličin ***a***, ***e***, ***i***, **Ω** a ***ω*** spolu s časovým údajem vztaženému ke konkrétní pozici satelitu na dráze (např. čas průchodu perigeem), nazýváme elementy čili prvky dráhy (Keplerian elements). Z nich se dá jednoznačně určit poloha obíhajícího tělesa v kosmickém prostoru pro libovolný časový okamžik.

Z druhého Keplerova zákona vyplývá, že pohyb tělesa po eliptické oběžné dráze je značně nerovnoměrný a to tím více, čím je větší výstřednost dráhy. Protože plocha opsaná průvodičem obíhajícího tělesa je za časovou jednotku stejná je rychlost tělesa v perigeu proto u výstředné dráhy několikanásobkem rychlosti v apogeu.

Řešením predikční úlohy je tedy výpočet pravé anomálie ***f*** Pro daný čas v budoucnosti.



Pravá anomálie ***f*** je se střední anomálií ***M*** totožná pouze v případě, že je dráha přesně kruhová (***e*** = 0). Při nerovnoměrném pohybu po eliptické dráze je ***f*** dána rovnicí

$$f = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}\right) \qquad \text{[rad; rad]}$$

kde ***E*** je tzv. excentrická anomálie. Její hodnotu získáme řešením Keplerovy rovnice

$$E = M + e \cdot \sin E \qquad \text{[rad; rad]}$$

Jde o transcendentní rovnici, kterou řešíme iterací. V prvním kroku dosadíme za ***E*** na pravé straně rovnice ***M*** a vypočteme odhad E_1. V druhém kroku vypočteme E_2 při E_1 na pravé straně, atd. Výpočet ukončíme, je-li $|E_n - E_{n-1}| < \delta$, přičemž δ stanovíme podle požadované přesnosti výpočtu. Řešení Keplerovy rovnice konverguje rychle.

Ze známe pravé anomálie ***f*** určíme okamžitou vzdálenost tělesa od těžiště soustavy, tj. délku průvodiče

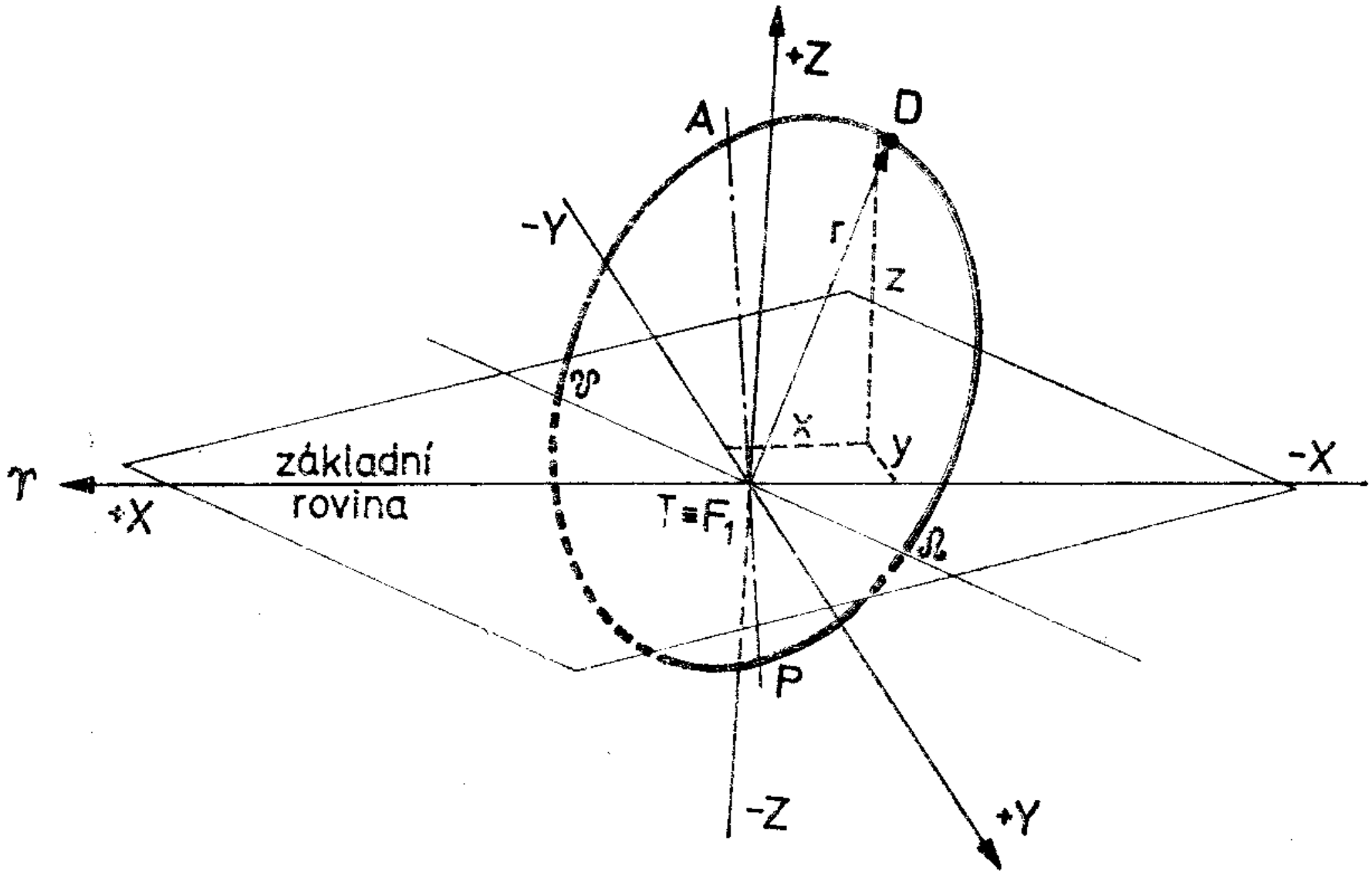
$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e \cdot \cos f}$$

[km; km, rad]

Rovnici pro okamžitou rychost družice jsme si uvedli. Úhel α který svírá vektor rychlosti s průvodičem tělesa v rovině dráhy lze vypočítat

$$\sin\left(90^0 - \alpha\right) = \frac{e \cdot \sin f}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cdot \cos f}}$$

Známe-li pravou anomálii ***f*** a délku průvodiče ***r***, spolu s prvky dráhy ***i***, **Ω** a ***ω***, můžeme vypočítat pravoúhlé absolutní (inerciální) souřadnice tělesa v souřadném systému s počátkem v těžišti (střed Země), s osou ***x*** mířící do jarního bodu, osou ***z*** kolmou k základní rovině (rovina rovníku) a osou ***y*** ležící v základní rovině (kolmo na osu ***x***).


+Z
A
D
-Y
r
z
ϑ
x
y
γ
základní
rovina
+X
-X
T=F1
Ω
P
-Z
+Y

$$x = r\left[\cos\left(f+\omega\right)\cos\Omega - \sin\left(f+\omega\right)\sin\Omega\cdot\cos i\right]$$

$$y = r\left[\cos\left(f+\omega\right)\cos\Omega + \sin\left(f+\omega\right)\cos\Omega\cdot\cos i\right]$$

$$z = r\cdot\sin\left(f+\omega\right)\sin i$$

Nahradíme-li u družic Země v těchto délku vzestupného uzlu **Ω** okamžitou zeměpisnou délkou (je to zeměpisná délka místa, nad nímž přechází dráha družice z jižní hemisféry na severní) vzestupného uzlu **Λ**, dostaneme výrazy pro výpočet pravoúhlých geocentrických souřadnic tělesa. Od nich můžeme přejít k zeměpisným souřadnicím (při zanedbání zploštění zeměkoule) subsatelitního bodu na základě rovnic

$$\sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$0^0 \le \lambda < 360^0$$

$$\cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$-90^0 \le \varphi \le +90^0$$

kde λ je zeměpisná délka (počítaná kladným směrem na východ) a φ zeměpisná šířka (kladná směrem na sever).

Vzhledem k tomu, že se Země otáčí kolem své osy, mění se okamžitá planetografická délka vzestupného uzlu proporcionálně s časem podle vztahu

$$\Lambda = \Lambda_0 - \Lambda_1 \left(t - t_0 \right)$$

kde $\boldsymbol{\Lambda_0}$ je planetografická délka v čase $\boldsymbol{t_0}$ a $\boldsymbol{\Lambda_1}$ je úhlová rychlost rotace naší planety (Země se otočí o 360^o za 23,93447 hod.). Mezi $\boldsymbol{\Omega}$ a $\boldsymbol{\Lambda_0}$ platí vztah

$$\Lambda_0 = \Omega - S_0$$

$\boldsymbol{S_0}$ je hvězdný (siderický) čas vyjádřený v úhlové míře v okamžiku $\boldsymbol{t_0}$ (je uváděn např. v astronomických ročenkách).

Rušený pohyb

Vztahy uvedené v předchozím odstavci předpokládají, že na pohyb tělesa má vliv pouze gravitace jednoho tělesa (Země) a že jeho působení lze popsat gravitačním potenciálem hmotného bodu. Ve skutečnosti tomu tak není, existuje řada poruch v pohybu těles pohybujících se v kosmu.

Matematický popis těchto poruch je značně složitý. V podstatě jde buď o numerickou integraci rušivých zrychlení, působících na sledované těleso, nebo o hledání analytických vzorců vyjadřujících vliv poruch na jednotlivé parametry dráhy.

Mezi hlavní rušivé vlivy pohybu malých umělých družic Země patří vliv daný její nekulatostí.

Zploštění Země způsobuje značnou nerovnoměrnost gravitačního pole, jejímž důsledkem je stálé stáčení roviny oběžné dráhy (změna délky vzestupného uzlu **Ω**) a stáčení perigea (změna argumentu perigea ***ω***).

Rychlost stáčení roviny dráhy (regrese uzlů) lze vyjádřit

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 \cdot n \frac{R_0^2 \cdot \cos i}{a^2 \left(1 - e^2\right)^2}$$

kde J_2 je tzv. zonální koeficient, pro Zemi $J_2 = 1{,}08263.10^{-3}$. Podobně pro rychlost stáčení perigea (precese přímky apsid) platí

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2} J_2 \cdot n \frac{R_0^2 \left(5 \cdot \cos^2 i - 1\right)}{2 \cdot a^2 \left(1 - e^2\right)^2}$$

V obou posledních rovnicích je rozměr výsledné veličiny shodný s dosazeným rozměrem středního pohybu. Z těchto rovnic plyne, že rychlost regrese a precese závisí na sklonu dráhy ***i***. Při sklonu do 90^o (posigrádní dráhy) se stáčí rovina dráhy proti směru otáčení Země, při sklonech větších než 90^o (retrográdní dráhy) ve směru otáčení. U polárních drah se sklonem přesně 90^o bude rovina nehybná. Dá se také navrhnout mírně retrográdní dráha u které bude regrese rovna poměru $360^o/365$ za den. Taková dráha se nazývá synchronní se Sluncem (Sun-synchronous Orbit), protože její orientace ke Slunci se během roku nemění. Poněkud složitější je situace u precese přímky apsid. Pokud bude sklon ležet v intervalu $63,4^o < i < 116,6^o$ budou se apsidy stáčet proti směru rotace, při ostatních hodnotách ***i*** ve směru rotace Země. Zajímavá je hodnota $i = 63,4^o$, kdy k precesi přímky apsid nedochází. Zvláště vysoké eliptické dráhy (HEO) s touto inklinací našly pro svou stabilitu uplatnění.

Protože vlivem zploštění Země již není dráha družice uzavřenou křivkou, stává se sporným určení doby oběhu, která se u nerušených drah rovnala době mezi dvěma průchody družice týmž bodem. Taková doba oběhu ***P***, daná 3. KZ se nazývá oskulační perioda. Kromě ní se definuje drakonická perioda $\boldsymbol{P_\Omega}$, jako doba mezi dvěma průchody vzestupným uzlem a anomalistická perioda $\boldsymbol{P_\pi}$, odpovídající době mezi následujícími průchody perigeem. Platí tyto vztahy

$$P_\Omega = P\left[1-\frac{3}{2}J_2\frac{R_0^2}{2a^2}\left(5\cdot\cos^2 i+1\right)\right]$$

$$P_\pi = P\left[1-\frac{3}{2}J_2\frac{R_0^2}{a^2}\right]$$

Na rovnicích které jsme uvedli jsou založeny programy pro sledování družic, které dokáží počítat jak predikci polohy v budoucnosti, tak polohu v reálném čase. Kromě nehomogenního gravitačního pole se však uplatňují ještě další rušivé vlivy:

- odpor atmosféry – se uplatňuje zvláště u družic na drahách LEO,

- gravitace jiných nebeských těles, zvláště Slunce a Měsíce – vliv je patrný zejména na vysokých drahách GEO a HEO,

- tlak slunečního záření (sluneční vítr) – může způsobit zpomalení ale i zrychlení pohybu tělesa na všech drahách.

Tyto vlivy se projeví více nebo méně ve zrychlení středního pohybu družice.

Soubory prvků dráhy

Jak jsme již uvedli, výchozí poloha družice a popis její dráhy se udává souborem kepleriánských prvků dráhy (efemerid). Protože každý program pro predikci polohy družice vyžaduje vložení tohoto souboru, popíšeme stručně formu v jaké je lze získat a význam jednotlivých parametrů.

Nejrozšířenější je formát NASA, nazývaný též dvouřádkový (2-LINE). Data jsou měřena (pomocí radarů) a publikována korporací NORAD. V tomto formátu lze získat aktuální kepleriánské elementy např. na Internetu. Součástí souboru je i klíč k dekódování:

```
DECODE 2-LINE ELSETS WITH THE FOLLOWING KEY:
1 AAAAAU 00  0  0 BBBBB.BBBBBBBB  .CCCCCCCC  00000-0  00000-0 0  DDDZ
2 AAAAA EEE.EEEE FFF.FFFF GGGGGGG HHH.HHHH III.IIII JJ.JJJJJJJJKKKKKZ
KEY: A-CATALOGNUM B-EPOCHTIME C-DECAY D-ELSETNUM E-INCLINATION F-RAAN
G-ECCENTRICITY H-ARGPERIGEE I-MNANOM J-MNMOTION K-ORBITNUM Z-CHECKSUM
```

Následují tři soubory pro družice na drahách LEO, HEO a GEO:

```
NOAA-17
1 27453U 02032A   02255.82236277  .00000592  00000-0  26196-3 0  1152
2 27453  98.7772 322.6911 0012779  96.1169 264.1940 14.23138543 11388
AO-40
1 26609U 00072B   02252.87665266 -.00000369  00000-0  10000-3 0  2603
2 26609   7.6033  94.9525 7929753  88.0868 350.7821  1.25596957  8551
METEOSAT 7
1 24932U 97049B   02341.86078128 -.00000002  00000-0  00000+0 0  2095
2 24932   0.0888 356.4918 0001315 229.0325 160.9716  1.00266170 19299
```

Prvky určující dráhu družice:

INCLINATION	je sklon dráhy (***i***)- úhel mezi rovinou dráhy a rovinou rovníku.
RAAN	je délka vzestupného uzlu (**Ω**). Vyjadřuje se ve stupních zeměpisné délky a je to úhel mezi vzestupným uzlem a směrem k jarnímu bodu. RAAN tedy udává orientaci roviny oběžné dráhy v prostoru.
ECCENTRICITY	je výstřednost dráhy (e) - bezrozměrné číslo v intervalu (0,1). V souboru se uvádí pouze desetinná část.
ARGPERIGEE	neboli argument perigea (***ω***), který říká jak je dráha (elipsa) natočena v rovině dráhy.

MNMOTION

podle 3. Keplerova zákona nahrazuje Mean Motion (***MM***), neboli střední pohyb, délku hlavní poloosy (***a***). Dělíme-li 1440 (počet minut za den) středním pohybem ***MM***, dostaneme tzv. oskulační periodu ***P*** [min]. Na rozdíl od předchozího textu je ***MM*** udáván počtem obletů za den. Platí tedy

$$MM = \frac{1440 \cdot 60 \cdot n}{2\pi}$$

[obletů/den; rad.s-1]

Prvky určující polohu družice v daném okamžiku:

MNANOMALY

Mean Anomaly (***MA***), neboli střední anomálie určuje polohu družice na dráze v daném okamžiku - epoše. Má rozměr úhlového stupně.

Někdy bývá označována jako fáze obletu.

Je-li ***MA*** = 180^o, je družice v apogeu.

V ostatních bodech dráhy se skutečná poloha stanoví řešením Keplerovy rovnice. Mezi námi definovanou střední anomálií ***M*** a ***MA*** je vztah

$$MA = \frac{180}{\pi} M$$

[^{o}; rad]

EPOCHTIME je časový údaj vztažený ke střední anomálii ***MA***. Udává se ve dnech. První dvě číslice celé části čísla znamenají rok a další tři číslice pořadové číslo dne v daném kalendářním roce. Desetinná část je časový okamžik v tomto dni. Např. EPOCHTIME = 1,5 odpovídá 1. lednu v pravé poledne.

Korekce rušeného pohybu družice:

DECAY Decay Rate vyjadřuje zrychlení středního pohybu a má rozměr počet obletů za den^2. Kromě gravitační a odstředivé síly působí na družici také rušivé síly jako přitažlivost Měsíce a Slunce, sluneční vítr, brzdný účinek

zbytků atmosféry apod. DECAY vyjadřuje tendenci změny středního pohybu v okamžiku měření kepleriánských prvků. Obvykle bývá kladný (pohyb je brzděn, čímž se dráha snižuje a tomu odpovídá větší střední pohyb) ale může být i záporný (když se rušivé síly přechodně projeví zvýšením dráhy družice). Po ***N*** dnech se změní střední pohyb ***MM***(*N*) z původního ***MM***(0) na

$$MM(N) = MM(0) + N \cdot DECAY$$

Kontrolní prvky:

ORBITNUM	Orbit Number je číslo obletu družice v dané epoše,
CATALOGNUM	číslo katalogu,
ELSETNUM	číslo souboru v daném katalogu,
CHECKSUM	kontrolní součet.

Pro kontrolní součet platí:

CHECKSUM = MODULO 10 ze součtu číslic v řádku, znak '-' se v součtu nahradí číslicí 1 a písmena se ignorují.

Dopplerův posuv frekvence

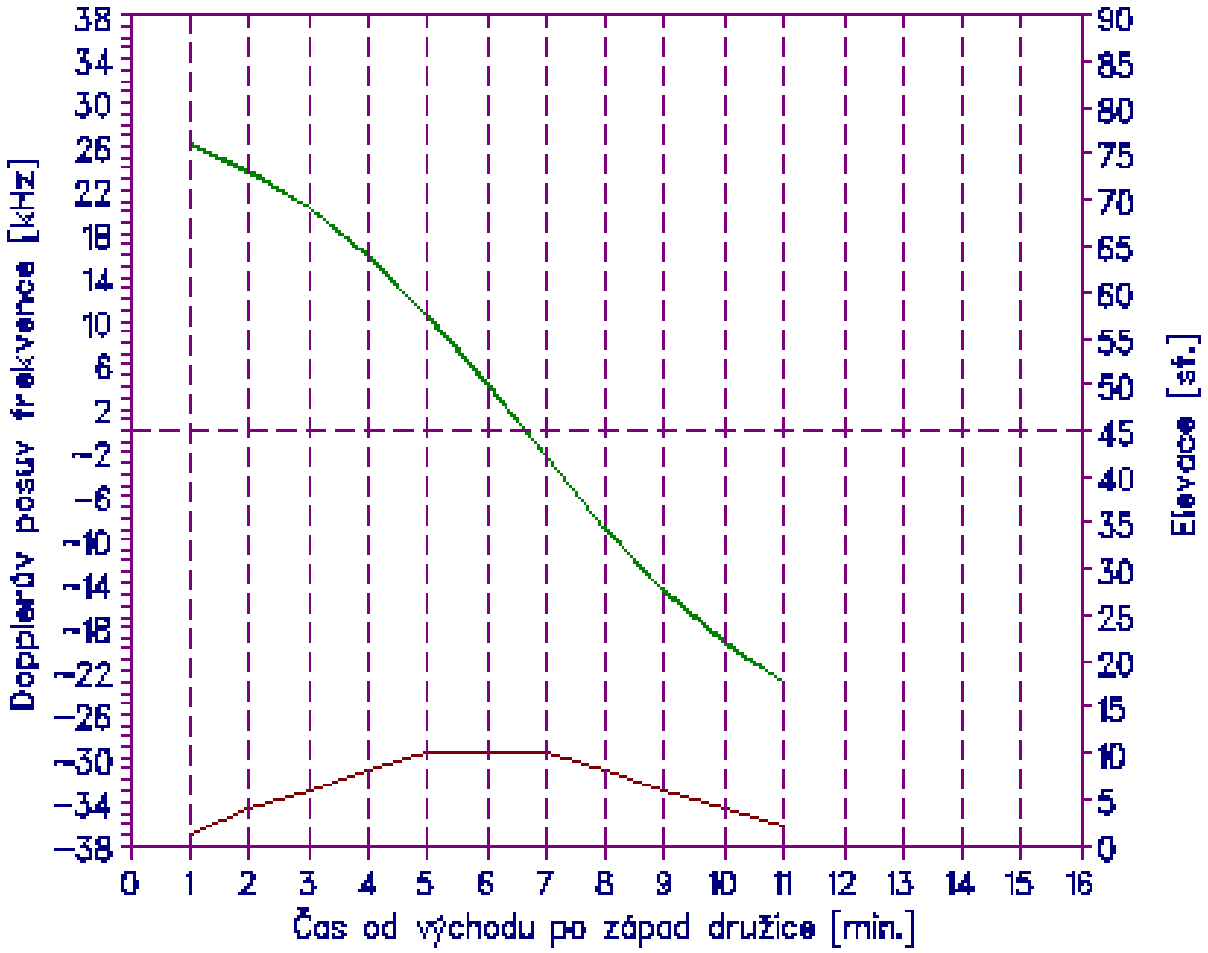
Protože se družice pohybují velmi rychle, uplatňuje se v různé míře Dopplerův posuv frekvence ***DP*** pro signály spoje Země-družice (uplinku) i družice-Země (downlinku)

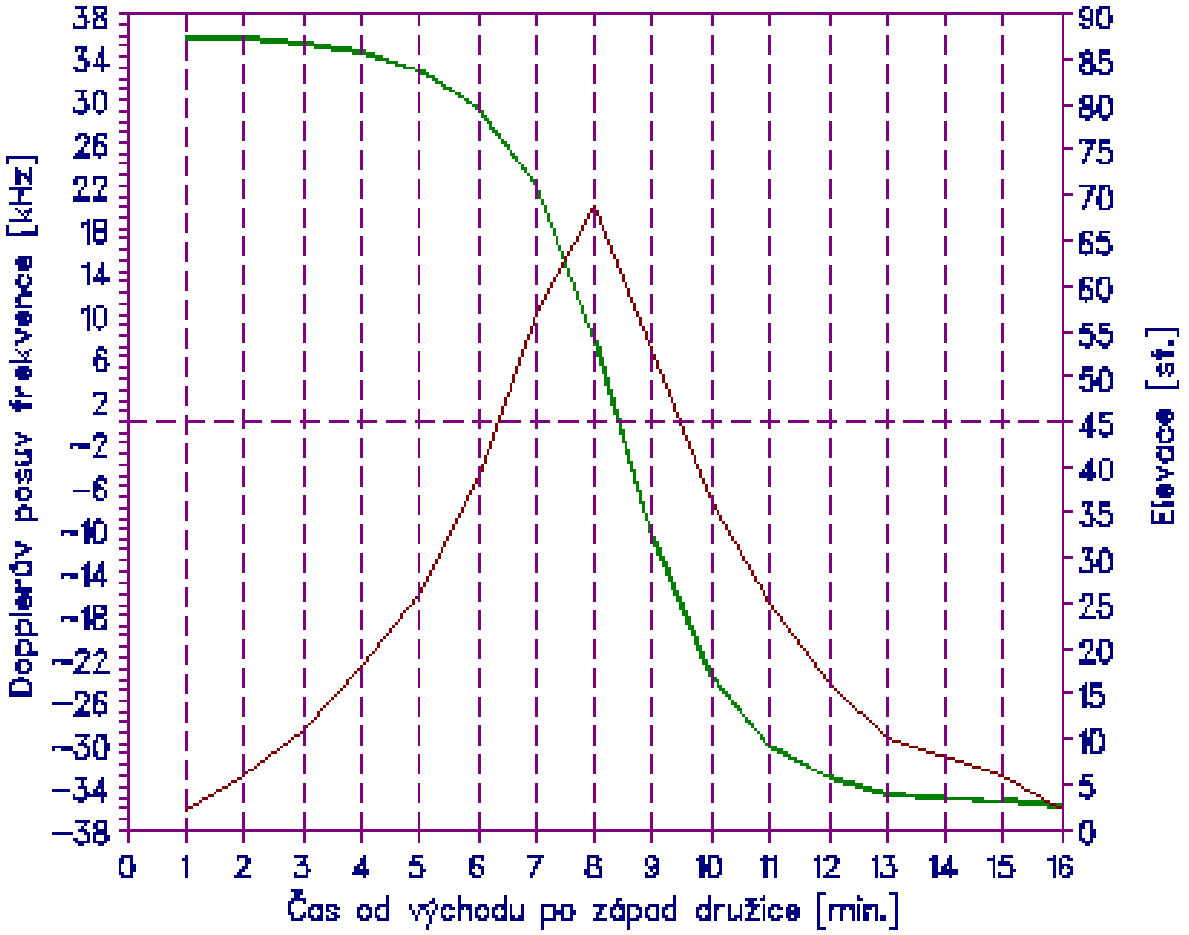
$$DP = \frac{f \cdot v \cdot \cos \Theta}{c}$$ [Hz; Hz, m.s^{-1},^{o}]

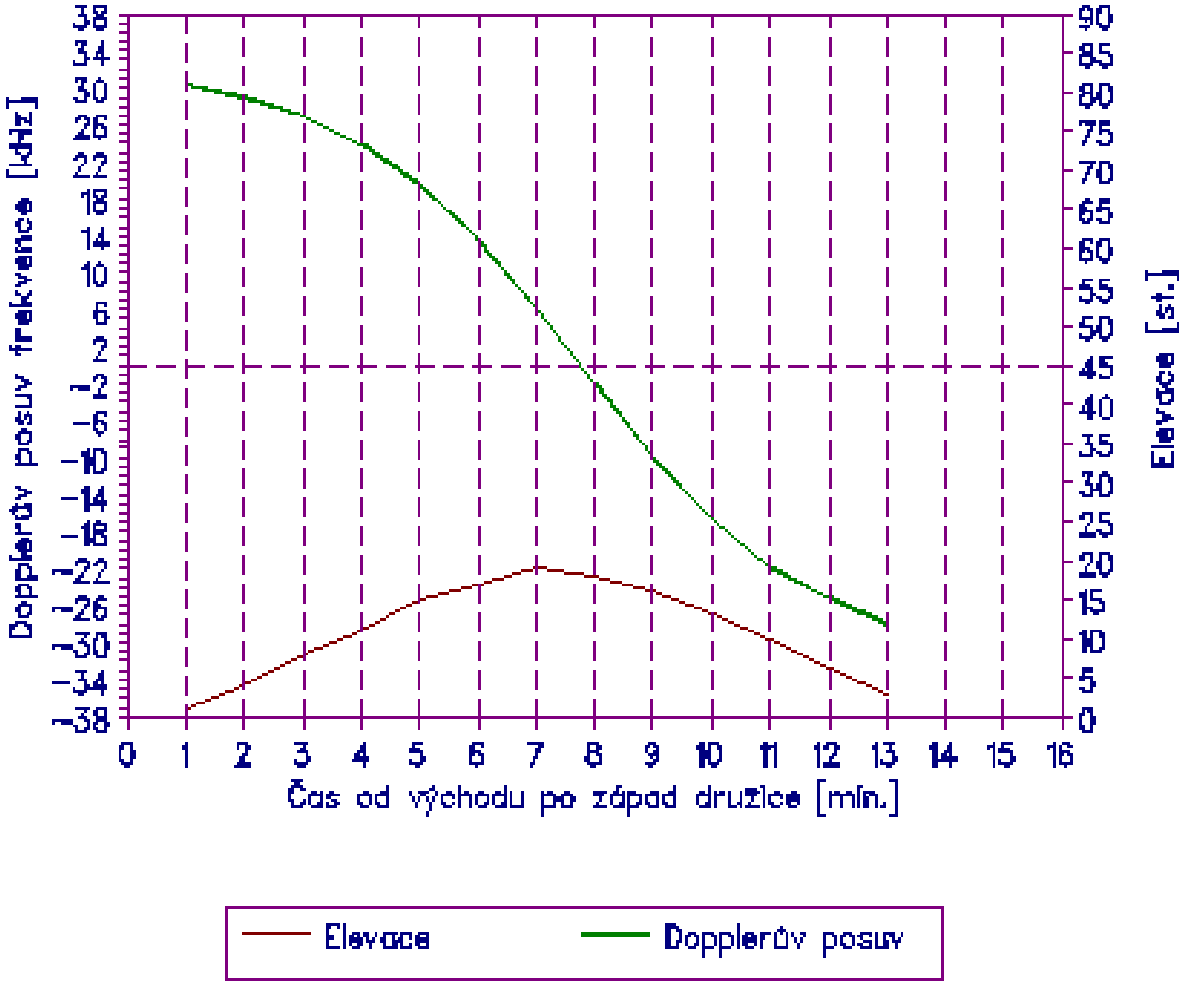
kde **Θ** je úhel mezi vektorem rychlosti družice ***v*** a směrem k pozorovateli, ***f*** je frekvence spoje a ***c*** rychlost šíření elektromagnetických vln (c = 3.108 m.s^{-1}). Součin ***v***.cos **Θ** je složka vektoru rychlosti družice ***v*** do směru k pozorovateli, rozhodující je tedy jejich vzájemná rychlost. Z tohoto důvodu je ***DP*** prakticky nulový u satelitů na dráze GEO a naopak nejvyšší u drah LEO. ***DP*** je tím

větší čím vyšší je frekvence spoje ***f***. Proto lze snadno pochopit, že družice na drahách LEO pracují obvykle na co nejnižších frekvencích. Dopplerův posuv frekvence je velmi nepříjemný, neboť nejenže signály neefektivně zabírají větší část spektra ale i jejich demodulace je obtížnější.

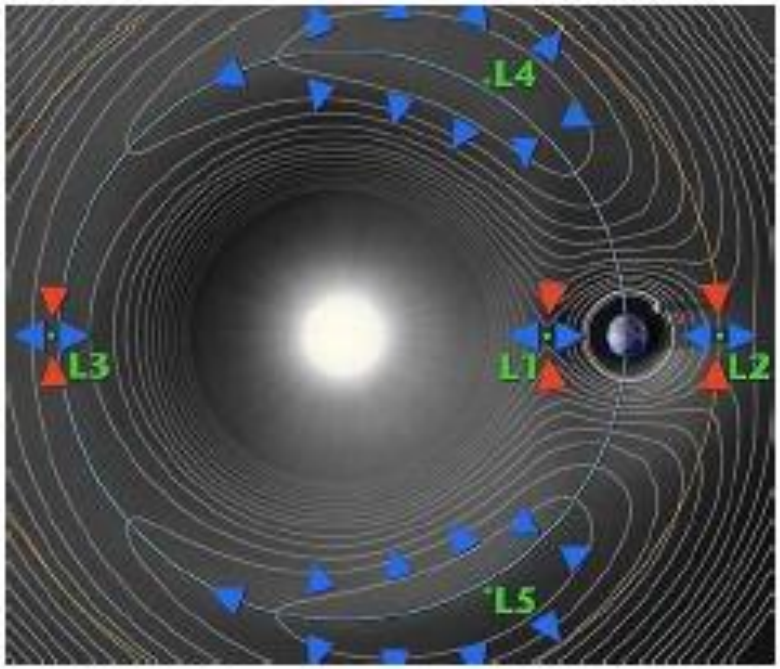
Na obrázcích je vypočítán Dopplerův posuv signálu na frekvenci 1,6 GHz pro družici na dráze LEO s výškou 800 km při různých elevačních úhlech (tři po sobě následující přelety).

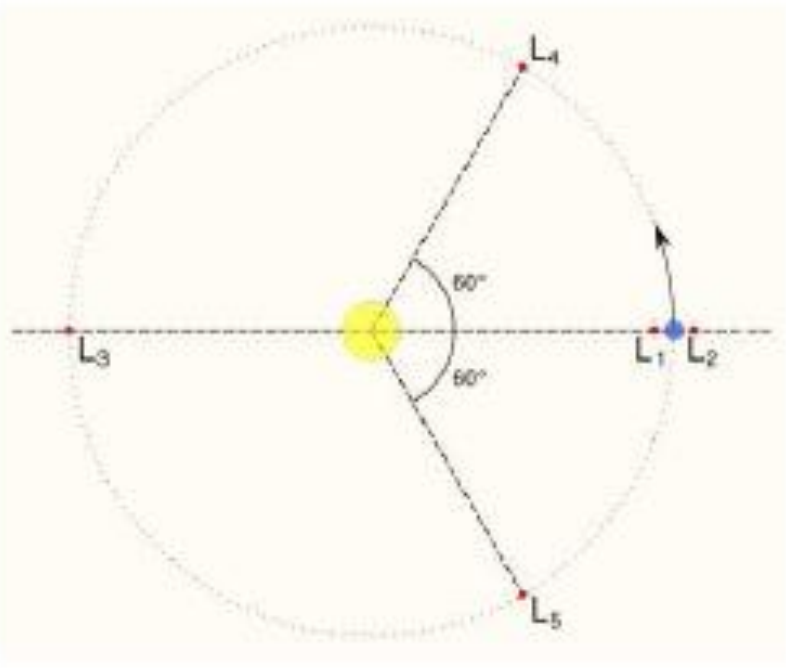

Dopplerův posuv frekvence [kHz]
38
34
30
26
22
18
14
10
6
2
-2
-6
-10
-14
-18
-22
-26
-30
-34
-38
Elevace [st.]
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
Čas od východu po západ družice [min.]

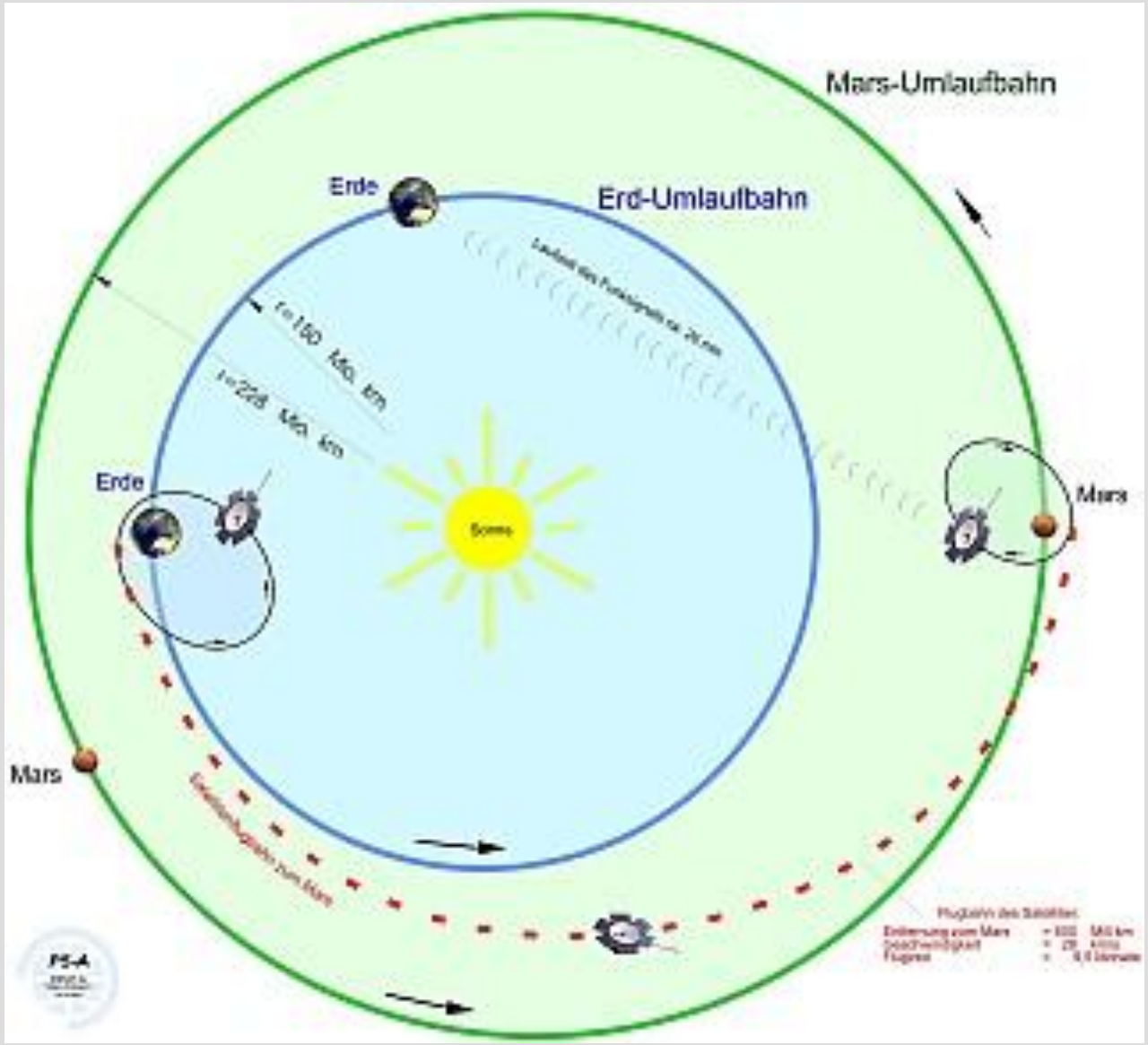

Dopplerův posuv frekvence [kHz]
38
34
30
26
22
18
14
10
6
2
-2
-6
-10
-14
-18
-22
-26
-30
-34
-38
Elevace [st.]
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
Čas od východu po západ družice [min.]


Dopplerův posuv frekvence [kHz]
38
34
30
26
22
18
14
10
6
2
-2
-6
-10
-14
-18
-22
-26
-30
-34
-38
Elevace [st.]
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
Čas od východu po západ družice [min.]
Elevace
Dopplerův posuv

Librační body






Mars-Umlaufbahn
Erde
Erd-Umlaufbahn
r = 150 Mio. km
r = 228 Mio. km
Erde
Sonne
Mars
Mars



http://www.stoff.pl/