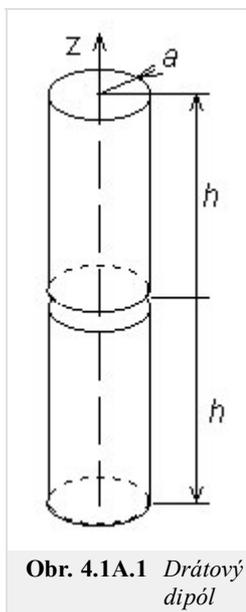


4.1 Drátový dipól

Základní teorie

V této kapitole se seznámíme s výpočtem parametrů **drátového dipólu** pomocí **momentové metody**. Veškeré informace se snažíme co nejsrozumitelněji vysvětlit ve vrstvě A. **Vrstvu B** v tomto případě využíváme k uvedení anglické verze této kapitoly. Činíme tak proto, abychom čtenáře seznámili s anglickou terminologií, využívanou v oblasti antén a numerických metod.



Obr. 4.1A.1 Drátový dipól

Všechny důležité technické parametry antén, jakými jsou např. **zisk**, **vstupní impedance** nebo **směrová charakteristika**, mohou být relativně snadno vypočteny, pokud známe **rozložení proudu** na anténním vodiči. Výpočet rozložení proudu je však bohužel dosti komplikovaný, protože při jeho určování je třeba řešit integrální rovnice.

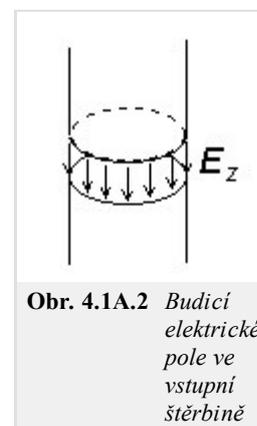
K řešení integrálních rovnic existují dva základní přístupy – iterační a momentový. Iterační metody vycházejí z hrubé aproximace proudového rozložení (uvažujeme např. sinusové rozložení proudu na drátovém dipólu), která je iteračně zpřesňována. Oproti tomu **momentové metody** převádějí řešení integrální rovnice na řešení soustavy rovnic lineárních, s nimiž si bez problémů poradí např. Matlab.

V této kapitole naší učebnice se budeme zabývat pouze momentovou analýzou **drátových antén**. Ve všech případech budeme předpokládat, že anténa je tvořena kruhovým válcem o poloměru a a že je dlouhá $2h$. Osu anténního vodiče umístíme do osy z (obr. 4.1A.1) **válcového souřadného systému** (r, ρ, z) . Dále předpokládáme, že se anténa nachází ve vakuu ($\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0, \sigma = 0$) a že veškeré možné ztráty jsou nulové.

Uprostřed anténního vodiče ($z = 0$) budeme uvažovat krátkou štěrbinu. Tuto štěrbinu připojíme k hypotetickému harmonickému zdroji, který vytváří rotačně souměrné budící pole (obr. 4.1A.2). Napětí ve štěrbině pak můžeme popsat vztahem

$$V = - \int_{gap} E_z dz. \tag{4.1A.1}$$

Dále předpokládáme, že toto napětí je rovno jednomu voltu. Ve vztahu (4.1A.1) značí E_z z-ovou složku intenzity budícího elektrického pole ve štěrbině, a tedy i na (válcovém) povrchu této krátké části antény (obr. 4.1A.2). Mimo štěrbinu je E_z nulové, protože předpokládáme **dokonalou elektrickou vodivost** vodiče antény.



Obr. 4.1A.2 Budící elektrické pole ve vstupní štěrbině

I. Momentová metoda

Uvažujme obecnou integrální rovnici ve tvaru

$$\int_a^b f(z, \xi) d\xi = g(z), \tag{4.1A.2}$$

kde f je neznámá funkce (v našem případě rozložení proudu na anténě), $\langle a, b \rangle$ značí analyzovanou oblast a g je známá funkce, popisující působení zdrojů. **Momentové řešení** rovnice (4.1A.2) potom můžeme rozepsat do následujících tří kroků:

1. Neznámou funkci f aproximujeme pomocí **lineární kombinace** známých **bázových funkcí** f_n a neznámých koeficientů c_n

$$f \approx \tilde{f} = \sum_{n=1}^N c_n f_n. \tag{4.1A.3}$$

2. Formální aproximaci (formální proto, že neznáme koeficienty c_n) hledané funkce \tilde{f} dosadíme zpět do řešené rovnice a zaměníme pořadí sčítání a integrování

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f_n(z, \xi) d\xi = g(z) + R(z). \tag{4.1A.4}$$

V uvedeném vztahu značí $R(z)$ tzv. **reziduum**, které vyjadřuje skutečnost, že aproximace řešení \tilde{f} není identická se zcela přesným řešením rovnice. Vztah (4.1A.4) je jednou rovnicí pro N neznámých koeficientů c_n .

3. Co možná nejpřesnější aproximaci řešení získáme tehdy, když **reziduum** R bude minimální. Reziduum tudíž minimalizujeme tzv. **metodou vážených reziduí**: součin vhodné **váhové funkce** w a rezidua R , integrovaný přes analyzovanou oblast $\langle a, b \rangle$ musí být nulový [5]. Pokud pro váhování postupně použijeme N různých váhových funkcí, získáme soustavu N lineárních rovnic pro N neznámých koeficientů c_n

$$\int_a^b w_m(z)R(z)dz = 0 \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (4.1A.5a)$$

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b w_m(z) \int_a^b f_n(z, \xi) d\xi dz = \int_a^b w_m(z)g(z)dz. \quad (4.1A.5b)$$

Jak **váhové funkce** tak **funkce báзовé** musejí být lineárně nezávislé na intervalu $\langle a, b \rangle$.

II. Báзовé funkce

Báзовé funkce mohou globální nebo lokální povahu. **Globální báзовé funkce** jsou definovány přes celou analyzovanou oblast $\langle a, b \rangle$. Např. soustava funkcí

$$f_n(z) = \cos\left(\frac{\pi n z}{h}\right) \quad (4.1A.6)$$

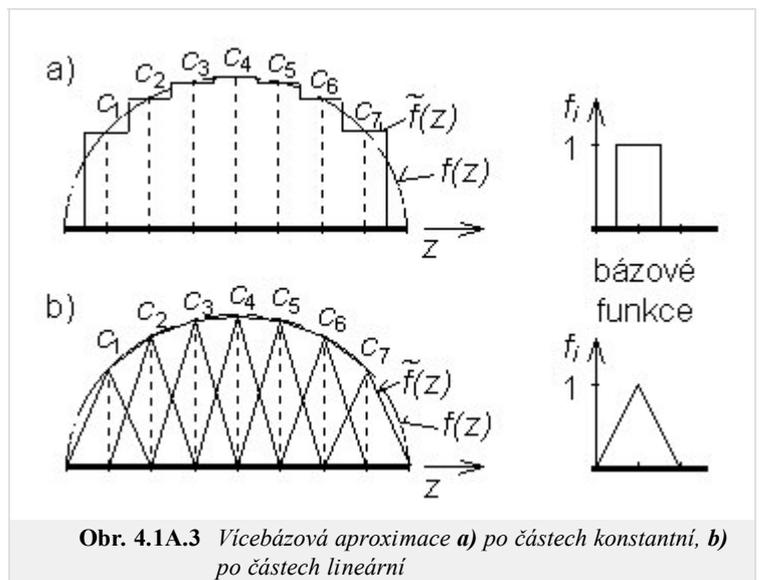
je lineárně nezávislá na $\langle a, b \rangle$ a koeficienty c_n

$$f(z) \approx \tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^N c_n f_n = \sum_{n=1}^N c_n \cos\left(\frac{\pi n z}{h}\right) \quad (4.1A.7)$$

zde mají význam Fourierových koeficientů proudového rozložení.

Aproximaci založenou na globálních báзовých funkcích nazýváme **jednobáзовou aproximací**.

Lokální báзовé funkce jsou definovány přes celou analyzovanou oblast také, avšak pouze na určité podoblasti nabývají nenulové funkční hodnoty (obr. 4.1A.3). Pokud jsou **báзовé funkce** normovány (tzn. pokud se jejich funkční hodnota mění od nuly do jedničky), pak koeficienty c_n mají význam **uzlových hodnot** (vzorků) hledané funkce f (obr. 4.1A.3). Aproximaci založenou na lokálních báзовých funkcích nazýváme **vícebáзовou aproximací**.



III. Váhové funkce

Mezi nejčastěji používané přístupy k minimalizaci rezidua patří **kolokační metoda** a **metoda Galerkinova**.

Kolokační metoda využívá k váhování **Diracovy impulsy**, umístěné do bodů, v nichž počítáme hodnoty neznámého proudového rozložení

$$w_m(z) = \delta(z - z_m). \quad (4.1A.8)$$

Kolokační metoda vykazuje velmi nízké výpočetní nároky, jelikož díky filtrační vlastnosti **Diracových impulsů** je jedna integrace eliminována

$$\sum_{n=1}^N c_n \int_a^b f_n(z_m, \xi) d\xi = g(z_m). \quad (4.1A.9)$$

Na druhou stranu je minimalizace rezidua vztahena pouze k bodům z_m , do nichž byly umístěny váhovací impulsy.

Galerkinova metoda využívá k váhování funkce, které jsou identické s funkcemi báзовými

$$w_m(z) = f_m(z). \quad (4.1A.10)$$

Galerkinova metoda vykazuje ve srovnání s **metodou kolokační** vyšší výpočetní nároky protože v jejím případě k eliminaci jednoho integrování nedochází. Na druhou stranu jsou však do procesu minimalizace rezidua zahrnuty všechny body analyzované oblasti $z \in \langle a, b \rangle$.

IV. Drátové antény

Uvažujme drátovou anténu z obr. 4.1A.1. Potom můžeme vyzařované elektromagnetické pole popsat pomocí **vektorového potenciálu A**

(popisuje působení proudů na anténě) a **skalárního potenciálu** φ [2]

$$\frac{\partial^2 A_z(z)}{\partial z^2} + k^2 A_z(z) = -\mu_0 J_z(z), \quad (4.1A.11a)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z^2} + k^2 \varphi(z) = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0}. \quad (4.1A.11b)$$

Zde J_z značí z -ovou složku proudové hustoty [$A \cdot m^{-2}$], vnutčenou anténě zdrojem, ρ je objemová hustota náboje [$C \cdot m^{-3}$] na anténním vodiči, A_z značí z -ovou složku **vektorového potenciálu**, φ je **skalární potenciál**, $k=2\pi/\lambda$ značí **vlnové číslo** a λ **vlnovou délku**.

Elektrony, které přitékají do antény jako proud, se hromadí na anténním vodiči jako náboj. V druhé polovině periody se směr proudu otočí a náboje z konců anténního vodiče odtékají zpět do zdroje. Jelikož náboje a proudy na anténě spolu souvisejí, musíme vzájemně je svázat. Činíme tak **podmínkou continuity** [2]

$$\frac{\partial J_z(z)}{\partial z} + j\omega\rho(z) = 0. \quad (4.1A.12a)$$

Pokud je poloměr anténního vodiče mnohem menší než vlnová délka $a \ll \lambda$, potom můžeme předpokládat, že proudy a náboje jsou soustředěny na ose vodiče. Tento předpoklad je samozřejmě nesprávný (v důsledku povrchového jevu jsou náboje a proudy soustředěny na povrchu vodiče), avšak metoda i přes tento nesprávný předpoklad dává překvapivě dostatečně přesné výsledky [5]. Řešíme-li (s uvážením uvedeného *chybného* předpokladu) soustavu (4.1A.11), dostáváme [2]

$$A_z(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{2h} I_z(\xi) \frac{\exp[-jkR(z, \xi)]}{R(z, \xi)} d\xi, \quad (4.1A.12b)$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{2h} \sigma(\xi) \frac{\exp[-jkR(z, \xi)]}{R(z, \xi)} d\xi. \quad (4.1A.12c)$$

Zde $I_z(\xi)$ značí proud [A] tekoucí v ose anténního vodiče, $\sigma(\xi)$ je délková hustota náboje [$C \cdot m^{-1}$] na ose anténního vodiče, $R(z, \xi)$ je vzdálenost mezi pozicí ξ zdroje pole $I_z(\xi)$ a $\sigma(\xi)$, dále z je místo, v němž počítáme potenciály $A(z)$ a $\varphi(z)$. Známe-li potenciály $A(z)$ a $\varphi(z)$, můžeme vypočítat intenzitu vyzařovaného elektrického pole [2]

$$E_z^s(z) = -j\omega A_z(z) - \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z}. \quad (4.1A.12d)$$

Elektrická intenzita musí splňovat **okrajovou podmínku** na povrchu dokonale elektricky vodivého anténního vodiče S

$$E_z^i + E_z^s = 0 \text{ na } S. \quad (4.1A.12e)$$

E_z^i značí z -ovou složku (tj. složku tečnou k povrchu anténního vodiče) vektoru elektrické intenzity dopadající vlny. Dopadající vlna je vytvořena zdroji mimo vlastní anténu. Když analyzujeme anténu jako vysílací, je E_z^i intenzita vytvořená napájecím zdrojem v budící šterbině (E_z v obr. 4.1A.2). Když analyzujeme anténu jako přijímací, je E_z^i intenzita přijímaného vlnění (po celé délce vodiče).

Chceme-li určit rozložení proudu na anténě, musíme vyřešit soustavu (4.1A.12).

Abychom se mohli postarat o splnění **okrajové podmínky** (4.1A.12e), musíme počítat elektrickou intenzitu (a tudíž i potenciály A a φ) na povrchu anténního vodiče. Proto můžeme vzdálenost mezi zdroji pole (na ose) a místy pozorování (na povrchu vodiče) vyjádřit jako

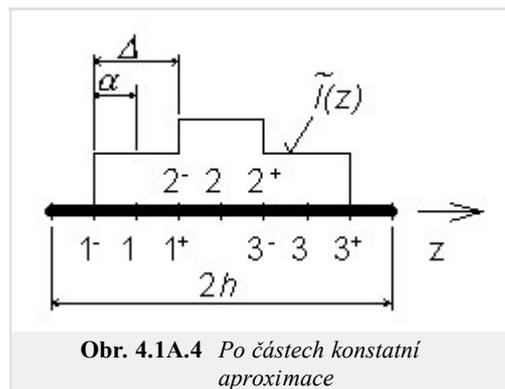
$$R(z, \xi) = \sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}. \quad (4.1A.13)$$

V dalších odstavcích budeme předpokládat po částech konstantní **bázové funkce** a Diracovy **funkce váhové**. S využitím těchto funkcí budeme hledat řešení soustavy (4.1A.12).

V prvním kroku musíme analyzovanou anténu diskretizovat. Tato diskretizace je naznačena na obr. 4.1A.4. Dolní hranice segmentů je označena indexem "−", horní hranice indexem "+". Dolní hranice prvního segmentu a horní hranice posledního segmentu jsou posunuty o polovinu segmentu za konec anténního vodiče, aby bylo možno modelovat **uzel proudu** $I(-h)=I(h)=0$ na koncích antény. Délka všech segmentů je stejná $\Delta = 2a$.

Dosadíme-li po částech konstantní aproximaci do (4.1A.12b,c), dostáváme

$$A_z(z) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \int_{-h+(n-0,5)\Delta}^{-h+(n+0,5)\Delta} \frac{\exp[-jkR(z, \xi)]}{R(z, \xi)} d\xi, \quad (4.1A.14b)$$



$$\varphi(z) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \sigma_n \int_{-h+(n-0,5)\Delta}^{-h+(n+0,5)\Delta} \frac{\exp[-jkR(z, \xi)]}{R(z, \xi)} d\xi. \quad (4.1A.14c)$$

Ve výše uvedených vztazích jsou I_n a σ_n **uzlové hodnoty** proudu a nábojové hustoty.

Jelikož první derivace po částech konstantní aproximace je nulová na konstantní části funkce a neexistuje na hranicích, derivace v (4.1A.12a) a (4.1A.12d) jsou nahrazeny **konečnými diferencemi**. Uvážíme-li že $I_n = I_z(-h+n\Delta)$, můžeme **rovnici kontinuity** přepsat do tvaru

$$\frac{I_z(-h+(n+1)\Delta) - I_z(-h+n\Delta)}{\Delta} + j\omega\sigma(-h+(n+0,5)\Delta) \approx 0 \quad (4.1A.15a)$$

a vztah pro výpočet intenzity elektrického pole přechází na

$$E_z^s(-h+n\Delta) \approx -j\omega A_z(-h+n\Delta) - \frac{\varphi[-h+(n+0,5)\Delta] - \varphi[-h+(n-0,5)\Delta]}{\Delta}. \quad (4.1A.15d)$$

Vztahy (4.1A.15a) a (4.1A.15d) odpovídají skutečnosti, že **Diracovy impulsy** jsou při váhování umístěny do středu segmentu u **vektorového potenciálu**

$$A_z(-h+m\Delta) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \int_{-h+(n-0,5)\Delta}^{-h+(n+0,5)\Delta} \frac{\exp[-jkR(-h+m\Delta, \xi)]}{R(-h+m\Delta, \xi)} d\xi \quad (4.1A.15b)$$

a do krajů segmentů u **potenciálu skalárního**

$$\varphi[-h+(m+0,5)\Delta] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \sigma_{n+} \int_{-h+n\Delta}^{-h+(n+1)\Delta} \frac{\exp\{-jkR[-h+(m+0,5)\Delta, \xi]\}}{R[-h+(m+0,5)\Delta, \xi]} d\xi. \quad (4.1A.15c)$$

Ve vztahu (4.1A.15c), $\sigma_{n+} = \sigma[-h+(n+0,5)\Delta]$.

Vztah, (4.1A.15) může být přepsán do kompaktnějšího tvaru

$$\sigma_{n+} \approx \frac{-1}{j\omega} \left[\frac{I_{n+1} - I_n}{\Delta} \right], \quad (4.1A.16a)$$

$$A_z(m) \approx \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_n \int_{\Delta_n} \frac{\exp[-jkR(m, \xi)]}{R(m, \xi)} d\xi, \quad (4.1A.16b)$$

$$\varphi(m^+) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \sigma_{n+} \int_{\Delta_{n+}} \frac{\exp[-jkR(m^+, \xi)]}{R(m^+, \xi)} d\xi, \quad (4.1A.16c)$$

$$-E_z^i(m) \approx -j\omega A_z(m) - \frac{\varphi(m^+) - \varphi(m^-)}{\Delta}. \quad (4.1A.16d)$$

Při odvození (4.1A.16d) byla uvažena **okrajová podmínka** (4.1A.12e).

Nyní se podrobněji podíváme na **rovnici kontinuity** (4.1A.16a). Tato podmínka vyjadřuje skutečnost, že jednotlivé segmenty antény mohou být nahrazeny **elementárními elektrickými dipóly** (obr. 4.1A.5). Uvážíme-li tento fakt, můžeme vyjádřit příspěvek n -tého segmentu (elementárního dipólu) k hodnotě skalárního potenciálu na pravé hranici m -tého segmentu díky (4.1A.16c) jako

$$\varphi(m^+) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[I_n \int_{\Delta_{n+}} \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\xi - I_n \int_{\Delta_{n-}} \frac{\exp(-jkR)}{4\pi R} d\xi \right] \frac{1}{\Delta}. \quad (4.1A.17)$$

Dosazením (4.1A.17) a (4.1A.16b) do (4.1A.16d) a vynásobením obou stran rovnice délkou segmentu Δ dostáváme

$$\mathbf{E}_z^i \Delta = \mathbf{Z} \mathbf{I}. \quad (4.1A.18)$$

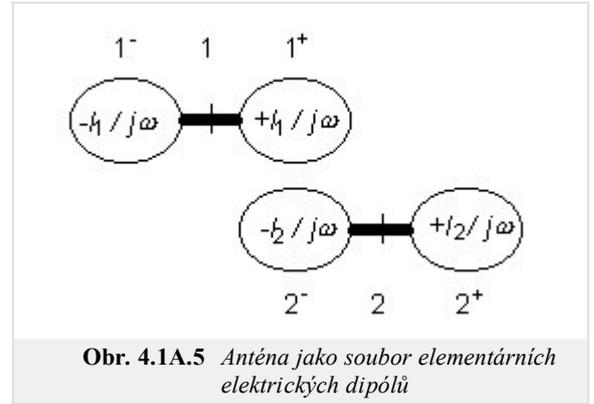
Pro prvky Z_{mn} impedanční matice Z platí:

$$\begin{aligned}
Z_{mn} = j\omega\mu\Delta \int_{\Delta_n} \frac{\exp[-jkR(m, \xi)]}{4\pi R(m, \xi)} d\xi + \\
+ \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\int_{\Delta_{n+}} \frac{\exp[-jkR(m^+, \xi)]}{4\pi R(m^+, \xi)} d\xi - \int_{\Delta_{n-}} \frac{\exp[-jkR(m^+, \xi)]}{4\pi R(m^+, \xi)} d\xi \right] \frac{1}{\Delta} - \\
- \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[\int_{\Delta_{n+}} \frac{\exp[-jkR(m^-, \xi)]}{4\pi R(m^-, \xi)} d\xi - \int_{\Delta_{n-}} \frac{\exp[-jkR(m^-, \xi)]}{4\pi R(m^-, \xi)} d\xi \right] \frac{1}{\Delta},
\end{aligned} \tag{4.1A.19}$$

Z_{mn} popisuje příspěvek proudu a náboje na segmentu n k napětí indukovanému na segmentu m .

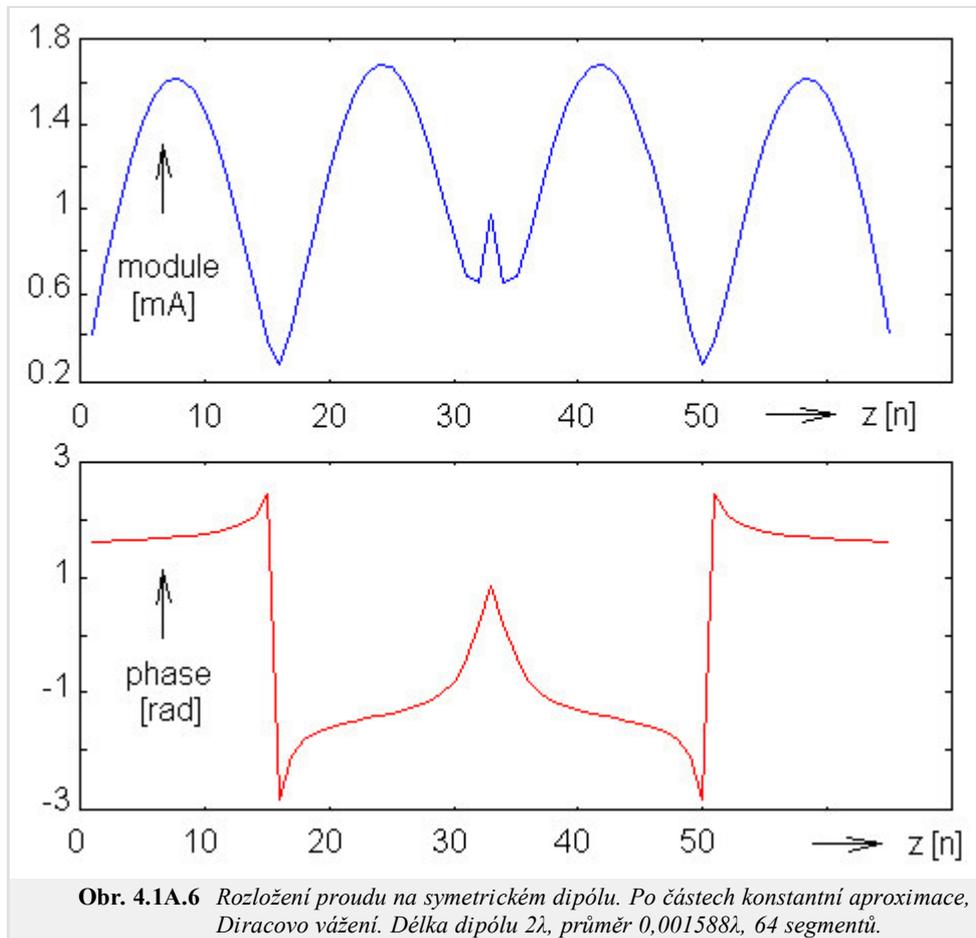
Jelikož složka elektrické intenzity, tečná k anténnímu vodiči, je nulová na všech segmentech vyjma napájecí štěrbině, prvky sloupcového vektoru napětí (levá strana rovnice 4.1A.18) jsou nulové vyjma případu napájecí štěrbině (na štěrbině jsme předpokládali napětí 1 V). Z rovnice (4.1A.18) tedy můžeme vyjádřit sloupcový vektor uzlových hodnot rozložení proudu na anténě \mathbf{I} . Poměr vstupního napětí a vstupního proudu je potom roven vstupní impedanci antény.

Jako příklad si uveďme výsledek analýzy symetrického dipólu s délkou ramene $h = \lambda$ a s poloměrem anténního vodiče $a = 0.001588 \lambda$. Rozložení proudu na anténě, získané pomocí popsané metody, je nakresleno na obr. 4.1A.6.



Obr. 4.1A.5 Anténa jako soubor elementárních elektrických dipólů

Ve **vrstvě C** uvádíme uživatelský popis programu, s jehož pomocí je možno dosáhnout uvedeného výsledku. Ve **vrstvě D** pak čtenář nalezne informace o tom, jak je možno program efektivně sestavit v Matlabu.



Obr. 4.1A.6 Rozložení proudu na symetrickém dipólu. Po částech konstantní aproximace, Diracovo vážení. Délka dipólu 2λ , průměr $0,001588\lambda$, 64 segmentů.